Ejercicio Capítulo 14 de Teoria Cuántica de Campos (TCC aka CFT)

Se trata de hallar la función f(x) que es solución de la ecuación diferencial
$f\acute{}(x) - f(x) = x^2$
que tras emplear la función de Green ha resultado ser

$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -1/2e^{-\left|x-x\acute{}\right|}(x\acute{})^2dx\acute{}$

Resolución:

Cambiare $x\acute{}$ por y para evitar confusiones entre ambas variables, la $x\acute{}$ muda y la x de la función

$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -1/2e^{-|x-y|}(y)^2dy$

y teniendo en cuenta que:

$|x-y| = (x-y)$ para $y < x$ y $|x-y| = -(x-y)$ para $y > x$ descompondremos la integral en dos integrales

$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -1/2e^{-|x-y|}(y)^2dy = \int\limits_{-\infty}^{x} -1/2e^{-(x-y)}(y)^2dy + \int\limits_{x}^{+\infty} -1/2e^{(x-y)}(y)^2dy$

$f(x) = -1/2\left[\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}(y)^2dy + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{(x-y)}(y)^2dy\right] = -1/2\,[A+B]$

Haciendo estas integrales por partes, llamando A a la primera y B a la segunda

$A = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}(y)^2dy =$

Haciendo $\left\|u = y^2 \quad ; \quad dv = e^{-(x-y)}dy \quad ; \quad du = 2ydy \quad ; \quad v = e^{-(x-y)}\right\|$

$A = \left[x^2e^{-(x-y)}\right]_{-\infty}^{x} - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}2ydy = \left[x^2 - 0\right] - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}2ydy = x^2 - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}2ydy$

y ahora

$\left\|u = 2y \ ; \ dv = e^{-(x-y)}dy \ ; \ du = 2dy \ ; \ v = e^{-(x-y)}\right\|$

$A = x^2 - \left\{\left[2ye^{-(x-y)}\right]_{-\infty}^{x} - \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}2dy\right\} = x^2 - [2x-0] + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}2dy$

$A = x^2 - 2x + 2\left[e^{-(x-y)}\right]_{-\infty}^{x} = x^2 - 2x + 2\,[1-0]$

$$A = x^2 - 2x + 2$$

Repitiendo el proceso para la segunda integral

$B = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{(x-y)}(y)^2 dy =$

Haciendo $\left\| u = y^2 \quad ; \quad dv = e^{(x-y)} dy \quad ; \quad du = 2ydy \quad ; \quad v = -e^{(x-y)} \right\|$

$B = \left[-y^2 e^{(x-y)}\right]_x^{+\infty} - \int\limits_x^{+\infty} e^{(x-y)} 2ydy = \left[0-(-x^2)\right] - \int\limits_x^{+\infty} (-e^{(x-y)}) 2ydy =$

$x^2 + \int\limits_x^{+\infty} e^{(x-y)} 2ydy$

y ahora

$\left\| u = 2y \ ; \ dv = e^{(x-y)} dy \ ; \ du = 2dy \ ; \ v = -e^{(x-y)} \right\|$

$B = x^2 + \left\{ \left[-2ye^{(x-y)}\right]_x^{+\infty} - \int\limits_x^{+\infty} e^{(x-y)} 2dy \right\} = x^2 + [-0-(-2x)] + \int\limits_x^{+\infty} e^{(x-y)} 2dy$

$A = x^2 + 2x + 2\left[-e^{(x-y)}\right]_x^{+\infty} = x^2 + 2x + 2\left[-0-(-1)\right]$

$$B = x^2 + 2x + 2$$

Empleando la opción Compute-Evaluate de SWP compruebo estos resultados

$$\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}(y)^2 dy = x^2 - 2x + 2$$

$$\int\limits_{x}^{+\infty} e^{(x-y)}(y)^2 dy = x^2 + 2x + 2$$

Quedará finalmente

$f(x) = -1/2 \left[\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)}(y)^2 dy + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{(x-y)}(y)^2 dy \right] = -1/2 \left[(x^2 - 2x + 2) + (x^2 + 2x + 2)\right] =$

$-1/2(2x^2 + 4)$

$$f(x) = -x^2 - 2$$

Comprobación de la solución en la ecuación diferencial.

Ya que $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -2$

$\acute{f}(x) - f(x) = x^2 \quad ; \quad -2-(-x^2-2)) = -2 + x^2 + 2 = x^2$

O sea que se verifica que $f(x) = -x^2 - 2 = -(x^2+2)$ es la solucion correcta

l.q.n.p.m.contentos